

Теормин по курсу "Теория вероятностных распределений"

Руденко Д.А., Кафтанов И.А. 716

09 января 2020

Содержание

1	Определение случайного элемента и его распределения:	4
2	Определение случайной величины и ее распределения:	4
3	Одномерные распределения	5
3.1	Вырожденное	5
3.2	Бернулли	5
3.3	Биномиальное	5
3.4	Геометрическое	5
3.5	Пуассона	5
3.6	Отрицательное Биномиальное	6
3.7	Равномерное	6
3.8	Нормальное	6
3.9	Гамма	6
3.10	Показательное	7
3.11	Хи-квадрат	7
3.12	Стьюдента (t-распределение)	7
3.13	Снедекора-Фишера (f-распределение)	7
3.14	Вейбула	8
3.15	Парето	8
3.16	Логистическое	8
3.17	Логнормальное	8
3.18	Отрицательное гауссовское	9
3.19	Бета	9
4	Определение производящей функции целочисленной случайной величины	9
5	Определение производящей функции моментов случайной величины	10
6	Определение характеристической функции случайной величины	10
7	Определение случайного вектора и его распределения:	10

8 Многомерные распределения	11
8.1 Бернули	11
8.2 Биномиальное	11
8.3 Полиномиальное	11
8.4 Геометрическое	12
8.5 Пуассона	12
8.6 Равномерное в области	12
8.7 Нормальное	12
8.8 Стьюдента. Хотеллинга	13
8.9 Уишарта	13
9 Определение случайного процесса. Теорема Колмогорова	13
9.1 Определение случайного процесса	13
9.2 Теорема Колмогорова	13
10 Примеры случайных процессов. Процесс Леви, процесс Пуассона, сложный процесс Пуассона, виннеровский процесс, гамма-процесс, многомерный процесс Пуассона	14
10.1 Процесс Леви	14
10.2 Пуассоновский Процесс	14
10.3 Сложный процесс Пуассона	14
10.4 Винеровский процесс	15
10.5 Гамма-процесс	15
10.6 Многомерный процесс Пуассона	15
11 Определение безгранично делимого распределения	15
12 Формула Леви-Хинчина для характеристической функции безгранично делимых распределений	15
13 Примеры безгранично делимых распределений	16
14 Определение устойчивого распределения	16
15 Определение области притяжения устойчивого распределения	16
16 Описание области притяжения устойчивого распределения	16
17 Формула для характеристической функции устойчивого распределения	17
18 Распределение с тяжелым хвостом	17
19 Распределение с длинным хвостом	17
20 Субэкспоненциальное распределение и его основное свойство	17
21 Распределение с правильно меняющимся хвостом	17

22 Соотношение разных классов распределений с тяжелыми хвостами	18
23 Определение случайной замены времени, субординатор	18
24 Определение подчиненного процесса	18
25 Определение неоднородного процесса Пуассона	18
26 Связь однородного и неоднородного процессов Пуассона	19
27 Определения процесса Кокса	19
28 Определение самоподобного процесса	19
29 Дробное броуновское движение	19
30 Альфа-устойчивое движение Леви	19
31 Дробное устойчивое движение	20
32 Процесс с долговременной зависимостью, пример	20

1 Определение случайного элемента и его распределения:

Случайный элемент ξ есть измеримое отображение $\xi : \Omega \rightarrow X$ т.е. для любого $B \subseteq X, A := \xi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.
($X, \mathcal{B}$) - измеримое пространство, X - некоторое множество, а $\mathcal{B}$ - σ -алгебра его подмножеств.

Ω - элементы дают описание чем закончился эксперимент - пространство элементарных исходов

$\mathcal{A}$ - некоторая σ -алгебра подмножеств Ω , которые называются событиями

P - отображение из $\mathcal{A}$ в R^1 , со свойствами:

1. $\forall A \in \mathcal{A} P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. если $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ попарно несовместны, то

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

2 Определение случайной величины и ее распределения:

Случайная величина ξ есть измеримое отображение $\xi : \Omega \rightarrow R^1$ т.е. для любого $B \subseteq R^1, A := \xi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Распределением с.в. ξ называется вещественная функция P_ξ , заданная на σ -алгебре $\mathcal{B}$ борелевских подмножеств R^1 по правилу: если $B \in \mathcal{B}$ то

$$P_\xi(B) := P(\xi \in B)$$

Со следующими свойствами:

1. $\forall B \in \mathcal{B} P_\xi(B) \geq 0$
2. $P_\xi(R^1) = 1$
3. Если $B_1, B_2, \dots$ есть попарно не пересекающиеся борелевские подмножества, то

$$P_\xi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P_\xi(B_n)$$

Функцией распределения случайной величины ξ называется вещественная функция F_ξ заданная на R^1 по правилу: если $x \in R^1$, то

$$F_\xi(x) := P(\xi < x)$$

Свойства:

1. $0 \leq F_\xi(x) \leq 1 \forall x \in R^1$
2. $F_\xi(x_1) \leq F_\xi(x_2)$ если $x_1 < x_2$
3. $F_\xi(x)$ непрерывная слева
4. $F_\xi(x) \rightarrow 1$ если $x \rightarrow \infty$; $F_\xi(x) \rightarrow 0$ если $x \rightarrow -\infty$
5. $P(a \leq \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$

Хвост распределения определяется как $\bar{F}_\xi(x) := P(\xi \geq x) \quad x \in R^1$

3 Одномерные распределения

3.1 Вырожденное

С.в. имеет вырожденное в точке a распределение, если $P(\xi = a) = 1$ для такой с.в.

$$E(\xi) = a, \quad D(\xi) = 0$$

3.2 Бернулли

С.в. ξ имеет распределение Б. с параметром p : $0 < p < 1$,

$$\xi = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } p \\ 0, & \text{иначе } (1 - p) \end{cases}$$

Если $\xi = 1$ то говорят, что испытание было успешным.

$$E(\xi) = p \quad D(\xi) = p(1 - p) \quad P_\xi(s) = 1 + p(s - 1)$$

3.3 Биномиальное

С. в. ξ имеет биномиальное распределение с параметрами (n, p) если

$$P(\xi = m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}, \quad m = 0, \bar{n}$$

Допускает представление в виде суммы н.о.р.с.в. из распределения Бернулли с параметром p . $\xi = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$ т.е. число успехов в n независимых испытаниях

$$E(\xi) = np \quad D(\xi) = np(1 - p) \quad P_\xi(s) = (1 + p(s - 1))^n$$

3.4 Геометрическое

С.в. ξ имеет геометрическое распределение с параметром $(p, 0 < p < 1)$ если

$$P(\xi = m) = p(1 - p)^{m-1}, \quad m = 1, 2, \dots$$

ξ - номер того испытания в последовательности независимых испытаний, когда впервые появился первый успех.

$$E(\xi) = \frac{1}{p} \quad D(\xi) = \frac{1 - p}{p^2} \quad P_\xi(s) = \frac{ps}{1 - s(1 - p)}$$

Свойство. ξ - целые положительные. Тогда ξ имеет геометрическое распределение тогда и только тогда, когда $\forall m, n \geq 1$

$$P(\xi > m + n | \xi > n) = P(\xi > m)$$

3.5 Пуассона

С.в. ξ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$ если

$$P(\xi = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad m = 0, 1, \dots$$

$$E(\xi) = \lambda \quad D(\xi) = \lambda \quad P_\xi(s) = e^{\lambda(s-1)}$$

Распределение Пуассона - предельный случай для биномиального распределения, когда $n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0, np \rightarrow \lambda, 0 < \lambda < \infty$

Свойство Если с.в. ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют р. Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2 то с.в. $\xi_1 + \xi_2$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$

3.6 Отрицательное Биномиальное

С.в. ξ имеет отрицательное биномиальное распределение с (r, p) , где r - положительное число, $0 < p < 1$, если

$$P(\xi = m) = p^r (1-p)^{m-r}, \quad m = r, r+1, r+2, \dots$$

ξ - номер того испытания в последовательности независимых испытаний с постоянной вероятностью успеха, когда впервые появляется r -ый успех.

$$E(\xi) = \frac{r}{p} \quad D(\xi) = \frac{r(1-p)}{p^2} \quad P_\xi(s) = \left[\frac{ps}{1-s(1-p)} \right]^r$$

Свойство ξ - это сумма $\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_r$ - н.о.р.с.в. из геометрического распр. с параметром p

3.7 Равномерное

С.в. ξ на $[a, b]$ если плотность:

$$\rho_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$E(\xi) = \frac{a+b}{2} \quad D(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Свойство выбор случайной точки на отрезке.

3.8 Нормальное

С.в. ξ имеет нормальное распределение с параметрами (a, σ^2) если она обладает плотностью распределения:

$$\rho_\xi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in R^1$$

Если $a = 0, \sigma^2 = 1$ - имеет стандартное норм. распр.

$$a = E(\xi) \quad \sigma^2 = D(\xi)$$

Свойство. Если $\xi_1 \sim N(a_1, \sigma_1^2)$ $\xi_2 \sim N(a_2, \sigma_2^2)$ то $\xi = \xi_1 + \xi_2 \sim N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
 σ - среднеквадратичное отклонение.

3.9 Гамма

С.в. ξ имеет гамма-распределение с параметрами $(\alpha > 0, \beta > 0)$ если обладает плотностью следующего вида:

$$\rho_\xi(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0$$

$$E(\xi) = \frac{\alpha}{\beta} \quad D(\xi) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Свойство если с.в. ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют гамма распр. с п. $(\alpha_1, \beta), (\alpha_2, \beta)$ то $\xi_1 + \xi_2$ имеет гамма распр. с п. $(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-x} dx \quad \operatorname{Re}(z) > 0, z \in \mathbb{C}$$

3.10 Показательное

С.в. ξ имеет показательное с параметрами $\lambda > 0$ если она обладает плотностью распределения:

$$\rho_{\xi}(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x > 0$$

Это частный случай гамма-распределения с $(\alpha = 1, \beta = \lambda)$

$$E(\xi) = \frac{1}{\lambda} \quad D(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Свойство Неотрицательная с.в. ξ имеет показательное распределение тогда и только тогда, когда у нее есть свойство памяти: $\forall x, y > 0$

$$P(\xi > x + y | \xi > x) = P(\xi > y)$$

3.11 Хи-квадрат

С.в. ξ имеет распределение χ^2 -распр. с n степенями свободы, если она допускает следующее представление:

$$\xi = \eta_1^2 + \dots + \eta_n^2$$

где $\eta_1 + \dots + \eta_n$ - независимые с.в. из стандартного нормального.

Свойство Это распределение есть частный случай гамма-распределения с параметрами $(\alpha = n/2, \beta = 1/2)$

$$E(\xi) = n \quad D(\xi) = 2n$$

3.12 Стьюдента (t-распределение)

С.в. ξ имеет распределение с n степенями свободы если она допускает следующее представление:

$$\xi = \frac{\eta_0}{\sqrt{(\eta_1^2 + \dots + \eta_n^2)/n}}$$

где $\eta_1 + \dots + \eta_n$ - независимые с.в. из стандартного нормального.

$$\rho_{\xi}(s) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{s^2}{2}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad x \in R^1$$

Распределение такой с.в. симметрично относительно нуля и $P(|\xi| > x) = 2P(\xi > x) \sim Cx^{-n} \quad x \rightarrow \infty$

Если у такой величины существуют конечные моменты второго порядка ($n > 2$) то они равны:

$$E(\xi) = 0 \quad D(\xi) = \frac{n}{n-2}$$

3.13 Снедекора-Фишера (f-распределение)

С.в. ξ имеет распределение с п. (m, n) если допускает следующее представление:

$$\xi = \frac{(\eta_1^2 + \dots + \eta_m^2)/m}{(\eta_{m+1}^2 + \dots + \eta_{m+n}^2)/n}$$

$\eta_1 \dots \eta_{m+n} \sim N(0, 1)$

$$\rho_{\xi}(x) = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(1 + \frac{m}{n}x)^{\frac{n+m}{2}}} \quad x > 0$$

При существовании моментов $n > 4$ порядков

$$E(\xi) = \frac{n}{n-2} \quad D(\xi) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-4)(n-2)^2}$$

3.14 Вейбула

С.в. ξ имеет распределение Вейбула с $\alpha > 0, \lambda > 0$ если она принимает положительные значения и имеет следующий хвост распределения

$$\bar{F}(x) = P(\xi > x) = e^{-(\lambda x)^\alpha} > 0$$
$$\rho_\xi(x) = \alpha \lambda (\lambda x)^{\alpha-1} e^{-(\lambda x)^\alpha}$$

Это распределение имеет конечные моменты любого порядка в частности:

$$E(\xi) = \frac{1}{\lambda} \Gamma(1 + \frac{1}{\alpha}) \quad D(\xi) = \frac{1}{\lambda^2} [\Gamma(1 + \frac{2}{\alpha}) - \Gamma(1 + \frac{1}{\alpha})^2]$$

Свойство если с.в. η имеет показательное распределение с параметром λ то с.в. $\xi = \eta^{\frac{1}{\alpha}}$ имеет распределение Вейбула с параметрами (α, λ) .

Играет важную роль в теории надежности.

3.15 Парето

С.в. ξ имеет р. Парето с параметрами $(x_0 > 0, \alpha > 0)$ если она имеет плотность сл. вида:

$$\rho_\xi(s) = \frac{\alpha x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}}, \quad x \geq x_0$$

Хвост имеет следующий вид:

$$P(\xi \geq x) = (\frac{x_0}{x})^\alpha \quad x \geq x_0$$

Это типичный пример распр. с тяжелым хвостом. При $\alpha > 2$:

$$E(\xi) = \frac{\alpha x_0}{\alpha - 1} \quad D(\xi) = \frac{\alpha x_0^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)}$$

3.16 Логистическое

С.в. ξ имеет Логистическое распределение, если она имеет плотность следующего вида:

$$\rho_\xi(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}, \quad x \in R^1$$

Это распределение симметрично относительно нуля, правый хвост имеет вид:

$$P(\xi > x) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

Все моменты конечны:

$$E(\xi) = 0 \quad D(\xi) = \frac{\pi^2}{3}$$

3.17 Логнормальное

С.в. ξ имеет логнормальное распределение с (a, σ) если она имеет следующее представление

$$\xi = e^\eta$$

где с.в. $\eta \sim N(a, \sigma^2)$ Это распределение сосредоточено на положительной полуоси и имеет следующие первые два момента:

$$E(\xi) = e^{a+\sigma^2/2} \quad D(\xi) = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2a+\sigma^2}$$

3.18 Отрицательное гауссовское

С.в. ξ имеет распределение ОГ с параметрами (a, λ) если она имеет плотность следующего вида:

$$\rho_{\xi}(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} x^{-3/2} e^{-\frac{\lambda(x-a)^2}{2a^2x}} \quad x > 0, a > 0, \lambda > 0$$

Это распределение связано с винеровским процессом. Имеет конечные моменты любого порядка.

$$E(\xi) = a \quad D(\xi) = \frac{a^3}{\lambda}$$

3.19 Бета

С.в. ξ имеет бета распределение с $(\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0)$ если она имеет плотность:

$$\rho_{\xi}(x) = \frac{1}{B(\alpha_1, \alpha_2)} x^{\alpha_1-1} (1-x)^{\alpha_2-1}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

где

$$B(\alpha_1, \alpha_2) = \int_0^1 x^{\alpha_1-1} (1-x)^{\alpha_2-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

есть бета-функция Эйлера.

$$E(\xi) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \quad D(\xi) = \frac{\alpha_1 * \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 (\alpha_1 + \alpha_2 + 1)}$$

Свойство при $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ получаем равномерное на $[0, 1]$

Свойство если с.в. η_1, η_2 имеет гамма-распределение с параметрами $(\alpha_1, \beta), (\alpha_2, \beta)$ то $\frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2}$ - бета распределение с параметрами (α_1, α_2)

4 Определение производящей функции целочисленной случайной величины

Если ξ принимается только целые и неотрицательные значения, то ее распределение можно описать как:

$$P_{\xi}(s) := E(e^{\xi}) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n * P_n$$

Такая функция существует для всех $s : |s| \leq 1$. Свойства:

1. $|P_{\xi}(s)| \leq 1 \quad \forall |s| \leq 1$
2. $P_{\xi}(0) = P_0 \quad P_{\xi}(1) = 1$
3. $P_{\xi}^{(n)}(s)|_{s=0} = n! P_n$
4. $\frac{d}{ds} P_{\xi}(s)|_{s=1} = E(\xi)$
5. Если $\xi_1 \dots \xi_n$ - независимы, то

$$P_{\sum_{i=1}^n \xi_i}(s) = \prod_{i=1}^n P_{\xi_i}(s)$$

5 Определение производящей функции моментов случайной величины

Для неотрицательных случайных величин с непрерывным распределением при описании их распределений часто используют преобразование Лапласа:

$$\psi_\xi(s) := E(e^{-s\xi}) = \int_0^\infty e^{-sx} \rho_\xi(x) dx$$

Свойства:

1. $0 < \psi_\xi(s) \leq 1, 0 < s < \infty$
2. $\psi_\xi(0) = 1$
3. $\psi_\xi^{(n)}(s)|_{s=0} = (-1)^n E(\xi^n)$
4. Если ξ_1 и ξ_2 независимы, то

$$\psi_{\xi_1+\xi_2}(s) = \psi_{\xi_1}(s)\psi_{\xi_2}(s)$$

6 Определение характеристической функции случайной величины

Характеристической функцией случайного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ называется комплекснозначная функция $\varphi_\xi(t)$, заданная в R^n по правилу

$$\varphi_\xi(t) = M[e^{i*t\xi}],$$

$$t = (t_1, t_2, \dots, t_n)^T \in R^n.$$

Свойства:

1. По хар. функции однозначно восстанавливается распределение. Т.е. если две с.в. имеют одинаковые хар. функции, то их распределения совпадают
2. Хар. функция суммы равна произведению хар. функций
3. $\phi_\xi^{(k)}(t)|_{t=0} = i^k E(\xi^k)$

7 Определение случайного вектора и его распределения:

Случайным вектором называется набор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ с.в. заданных на одном и том же вероятностном пространстве (Ω, A, P) .

Распределением случайного вектора $\xi \in R^d$ называется вещественная функция P_ξ , заданная на $\mathcal{B}_d$ по правилу:

$$\forall B \in \mathcal{B}_d \quad P_\xi(B) = P(\xi \in B)$$

Функцией распределения случайного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ называется вещественная функция $F_\xi(x)$, $x \in R^d$, заданная по правилу

$$F_\xi(x) = F_\xi(x_1, \dots, x_d) := P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_d < x_d)$$

Свойства:

1. $\forall x \in R^d \quad 0 \leq F_\xi(x) \leq 1$
2. F_ξ не убывает по каждому аргументу
3. $F_\xi(x) \rightarrow 1$ если все $x_k \rightarrow \infty$ и $F_\xi(x) \rightarrow 0$ если хотя бы одно $x_k \rightarrow -\infty$
4. $\forall x \in R^d \quad \forall h = (h_1, \dots, h_d) : h_k > 0$

$$P(x_1 \leq \xi_1 < x_1 + h_1, \dots, x_d \leq \xi_d < x_d + h_d) = \Delta_{h_1} \dots \Delta_{h_d} F_\xi(x)$$

$$\Delta_{h_k} f(x) := f(x_1, \dots, x_k + h_k, \dots, x_d) - f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_d)$$

8 Многомерные распределения

8.1 Бернули

Распределением случайного вектора ϵ в R^d называется многомерным распределением Бернулли с набором параметров $(P_i, i \in I)$ если он принимает значения во множестве I и $P(\epsilon = i) = P_i$.

1. Каждая компонента ϵ_k этого вектора имеет одномерное распределение Бернулли с параметром $p^{(k)} = \sum_{i \in I_k} p_i$
2. Любой подвектор этого вектора имеет многомерное распределение Бернулли (с новым набором параметров)
3. Компоненты этого вектора независимы тогда и только тогда, когда $\forall i \in I$:

$$P_i = P(\epsilon_1 = i_1) * \dots * P(\epsilon_d = i_d)$$

4. В одномерном случае с.в. показывает произошло ли некоторое событие A . В многомерном показывается какие именно **события** произошли из набора $A_1 \dots A_d$ в одном испытании.

Производящая функция $\forall s = (s_1, \dots, s_d)$

$$\psi_{\epsilon}(s) = E(s_1^{\epsilon_1} \dots s_d^{\epsilon_d}) = \sum_i s^i p_i$$

$$E(\epsilon_k) = p^{(k)} \quad D(\epsilon_k) = p^{(k)}(1 - p^{(k)}) \quad cov(\epsilon_k, \epsilon_l) = p^{(kl)} - p^{(k)}p^{(l)}$$

где $p^{(k)} = \sum_{i \in I_k} p_i$, $p^{(kl)} = \sum_{i \in I_{kl}} p_i$

8.2 Биномиальное

Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ имеет многомерное биномиальное распределение с параметрами n и $(P_i, i \in I)$ если

$$\xi = \sum_{j=1}^n \epsilon_j$$

1. При фиксированном $k = 1, \dots, d$ с.в. ξ_k имеет одномерное биномиальное распределение с параметрами n и $P^{(k)} = \sum_{i \in I_k} P_i$
2. Любой подвектор этого вектора имеет многомерное биномиальное распределение (с новым набором параметров)
3. Если ненулевыми являются те и только те P_i для которых только одна компонента в i равна 1, то имеем обычно полиномиальное распределение.
4. Компоненты этого вектора независимы тогда и только тогда, когда независимы компоненты для слагаемых

8.3 Полиномиальное

а

8.4 Геометрическое

Пусть $\bar{\epsilon}_j = (\epsilon_{j1}, \dots, \epsilon_{jd}, j \geq 1)$ есть многомерная схема Бернулли с параметрами $(p_i, i \in I)$

Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ имеет многомерное геометрическое распределение с параметрами $(p_i, i \in I)$ если для любого $k = 1, d$

$$\xi_k = \inf(j \geq 1 : \epsilon_{jk} = 1)$$

1. Любая компонента этого вектора имеет одномерное геометрическое распределение с параметром $p^{(k)}$
2. Любой подвектор этого вектора имеет многомерное геометрическое распределение
3. Компоненты этого вектора независимы тогда и только тогда, когда соответствующие одномерные схемы Бернулли независимы

8.5 Пуассона

Пусть имеется набор $\xi_i, i \in I, i \neq 0$ независимых с.в., каждая из которых имеет распределение Пуассона с некоторым параметром $\lambda_i \geq 0$ Определим новые случайные величины:

$$\xi^{(k)} = \sum_{i \in I_k} \xi_i$$

Случайный вектор $\bar{\xi} = (\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(d)})$ имеет многомерное распределение Пуассона с набором параметров $(\lambda_i, i \in I)$.

1. с.в. $\xi^{(k)}$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda^{(k)} = \sum_{i \in I_k} \lambda_i$
2. Любой подвектор этого вектора имеет распределение Пуассона
3. с.в. $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(d)}$ - вообще говоря зависимы. Например, для $d = 2$ имеем:

$$\xi^{(1)} = \xi_{10} + \xi_{11}, \quad \xi^{(2)} = \xi_{01} + \xi_{11}$$

8.6 Равномерное в области

Случайный вектор ξ имеет равномерное распределение в некоторой ограниченной области D если

$$\rho_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{D}, & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases}$$

Что соответствует выбору случайной точки из указанной области.

8.7 Нормальное

Случайный вектор ξ имеет многомерное нормальное распределение в R^d если он имеет следующую плотность распределения:

$$\rho_{\xi}(x) = (2\pi)^{-d/2} \det(A) e^{-\frac{1}{2} \sum_{p,q} a_{pq} (x_p - m_p)(x_q - m_q)}$$

где вектор $m = (m_1, \dots, m_d)$ и невырожденная матрица $A = (a_{pq})$ есть параметры распределения.

Матрица ковариаций $\Sigma = A^{-1} = (\sigma_{pq})$ тогда записываем $\xi \sim N(m, \Sigma)$

Стандартное многомерное нормальное распределение - нулевые средние и единичная матрица ковариаций.

1. $E(\xi_k) = m_k, Cov(\xi_p, \xi_q) = \sigma_{pq}$
2. Каждая компонента ξ_k имеет одномерное нормальное распределение с параметрами $m_k, \sigma_k^2 = \sigma_{kk}$
3. ДАЛЬШЕ НЕ ПОНЕЛ

8.8 Стьюдента. Хотеллинга

Пусть $Y, Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ - есть н.о.р. случайные векторы в R^d , которые имеют многомерное нормальное распределение со средними ноль и матрицей ковариаций Σ . Определим случайную матрицу

$$S := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Z_j Z_j^T$$

Тогда случайная величина $T^2 := Y^T S^{-1} Y$ имеет распределение Хотеллинга с n степенями свободы. **Далее идет более формальное определение** Пусть $X_1, \dots, X_n$ есть н.о.р. случайные векторы, причем $X_k \sim N(a, \Sigma)$. Обозначим

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \quad S = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})(X_k - \bar{X})^T$$

Тогда случайная величина $T^2 = n(\bar{X} - a)^T S^{-1} (\bar{X} - a)$ имеет распределение Хотеллинга с $n - 1$ степенью свободы.

8.9 Уишарта

Пусть $X_1, \dots, X_n$ есть н.о.р. случайные векторы в R^d причем $X_k \sim N(a, \sigma)$. Рассмотрим случайную матрицу

$$\tilde{A} = \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})(X_k - \bar{X})^T$$

В пространстве всех положительно определенных квадратных матриц A порядка d случайная матрица $\tilde{A}$ имеет распределение Уишарта, плотность распределения которого имеет вид

$$W_{n,\Sigma}(A) = \frac{|A|^{(n-d)/2} e^{-\frac{1}{2} \text{tr}(A\Sigma^{-1})}}{2^{(n-1)d/2} \pi^{d(d-1)/4} |\Sigma|^{(n-1)/2} \prod_{k=1}^d \Gamma((n-k)/2)}$$

Замечания:

1. Это многомерный аналог χ^2 -распределения
2. Случайная матрица $S := \frac{1}{n-1} \tilde{A}$ есть несмещенная оценка для Σ

9 Определение случайного процесса. Теорема Колмогорова

9.1 Определение случайного процесса

Случайным процессом называют набор случайных величин $\xi = (\xi(t), t \in T)$, заданных на одном и том же вероятностном пространстве (Ω, A, P) .

9.2 Теорема Колмогорова

Пусть для любого $n \geq 1$ и $\forall t_1, t_2, \dots, t_n \in [a, b]$ задана функция распределения $F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$. Если выполнены условия согласованности, то существует случайная функция $\{\xi(t), t \in T\}$, заданная на некотором вероятностном пространстве, для которой набор функций распределения $\{F_{t_1, \dots, t_n}, n \geq 1, t_1, \dots, t_n \in T\}$ является набором его конечномерных функций распределений.

Условия согласованности:

1. Для любого $n \geq 2, t_1, t_2, \dots, t_n \in [a, b], \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in R^1$ и любой перестановки $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ имеет место:

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$$

2. Для любого $n \geq 1, t_1, t_2, \dots, t_n \in [a, b], \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in R^1$ и любой перестановки $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ имеет место:

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}}(x_1, \dots, x_n, +\infty) = F_{t_{i_1}, t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$$

10 Примеры случайных процессов. Процесс Леви, процесс Пуассона, сложный процесс Пуассона, виннеровский процесс, гамма-процесс, многомерный процесс Пуассона

10.1 Процесс Леви

Случайный процесс $\{X(t), t \geq 0\}$ называется процессом Леви, если

1. $X(0) = 0$ п.н.
2. $X(t)$ - процесс с независимыми приращениями
3. для всех $t \geq 0, h \geq 0$, случайная величина $X(t+h) - X(t)$ имеет распределение не зависящее от t .

10.2 Пуассоновский Процесс

Случайный процесс $\{N(t), t \geq 0\}$ называется (однородным) процессом Пуассона с параметрами $\alpha \geq 0$, если

1. $N(0) = 0$ п.н.
2. $N(t)$ - процесс с независимыми приращениями: если $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_n$, то с.в.

$$N(t_0), N(t_1) - N(t_0), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

независимы

3. для всех $t \geq 0, h \geq 0$, случайная величина $N(t+h) - N(t)$ имеет распределение Пуассона с параметрами $\alpha * h$, то есть

$$P(N(t+h) - N(t) = m) = \frac{(\alpha * h)^m}{m!} \exp(-\alpha * h).$$

10.3 Сложный процесс Пуассона

Пусть $N(t)$ - процесс Пуассона с параметром α и $\{X_n\}$ - последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин, независимых от $N(t)$

Сложным процессом Пуассона с параметром α и распределением величины иска (заявки) $F(x) = P(X_1 < x)$ называется процесс следующего вида:

$$S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} X_j$$

Используется для описания суммарных выплат за время t , где поступление заявок представляет из себя пуассоновский поток и при поступлении каждой заявки выплачивается случайная сумма X_j .

10.4 Винеровский процесс

Случайный процесс $W(t)$ для $t \geq 0$ называется винеровским процессом с параметром σ^2 , если:

1. $W(0) = 0$ п.н.
2. $W(t)$ имеет независимые приращения,
3. для всех $t \geq 0$ и $h \geq 0$ случайная величина $W(t+h) - W(t)$ имеет нормальное распределение со средним 0 и дисперсией $\sigma^2 * h$.

10.5 Гамма-процесс

Случайный процесс $\{X(t), t \geq 0\}$ называется дисперсионным гамма-процессом с параметрами $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$, если

1. $X(0) = 0$ п.н.
2. $X(t)$ - процесс с независимыми приращениями
3. для всех $t \geq 0, h \geq 0$, случайная величина $X(t+h) - X(t)$ имеет распределение гамма с параметрами $\alpha * h$ и β .

10.6 Многомерный процесс Пуассона

Многомерным процессом Пуассона называется случайный процесс $\vec{N} = (\vec{N}(t), t \geq 0)$, где $\vec{N}(t) = (N_1(t), \dots, N_d(t))$, где $N^{(i)} = (N^{(i)}(t), t \geq 0)$ с параметром $\lambda^{(i)} \geq 0$ причем для разных i процессы независимы.

Замечания

1. k -ая компонента этого процесса есть одномерный процесс Пуассона с параметром $\lambda_k = \sum_{i \in I_k} \lambda^{(i)}$
2. Можно показать, что в некотором классе процессов предложенная нами структура процесса является единственно возможной

11 Определение безгранично делимого распределения

Функция F распределения называется бесконечно делимой, если для любого $n \geq 2$ существуют н.о.р.с.в. $(X_{nk}, 1 \leq k \leq n)$, для которых

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_{ni} < x\right) = F(x)$$

12 Формула Леви-Хинчина для характеристической функции безгранично делимых распределений

$$\phi(x) = e^{ics - \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{isx} - 1 - \frac{isx}{1+x^2}) dH(x)}$$

$c \in \mathbb{R}^1$ $\sigma^0 > 0$, H - спектральная функция Леви, со свойствами:

1. не убывает на каждой полуоси
2. не имеет атома в нуле

$$3. H(-\infty) = H(\infty) = 0$$

$$4. \int_{-1}^1 x^2 dH(x) < \infty$$

13 Примеры безгранично делимых распределений

К безгранично делимым распределениям относят:

- Вырожденное распределение
- Распределение Пуассона
- Отрицательное Биномиальное, в частности, геометрическое распределение
- Нормальное
- Гамма распределение (в частности показательное)
- Отрицательное гауссовское

14 Определение устойчивого распределения

Функция распределения F называется устойчивой, если для любых независимых с.в. X_1 и X_2 с ф.р. F и константами $B_1 > 0$ и $B_2 > 0$ существуют константы $A \in R^1, B > 0$,

$$B_1 X_1 + B_2 X_2 \stackrel{d}{=} B X_1 + A$$

15 Определение области притяжения устойчивого распределения

Говорят, что некоторая функция распределения $F(x)$ принадлежит области притяжения устойчивого распределения с показателем α , если существует последовательность н.о.р.с.в. с ф.р. $F(x)$, для которой в модели (*) предельное распределение есть заданное устойчивое распределение. Обозначается как $F(x) \in DA(\alpha)$.

Модель (*): Пусть мы имеем последовательность н.с.в. $(X_k, k \geq 1)$ с некоторой ф.р. $F(x)$. Образует последовательность центрированных и нормированных сумм:

$$S_n^* := \frac{X_1 + \dots + X_n - A_n}{B_n}$$

где $A_n \in R^1, B_n > 0$

16 Описание области притяжения устойчивого распределения

$F \in DA(\alpha)$ $0 < \alpha < 2$ тогда и только тогда, когда:

1. $F(-x) \sim C_1 * x^{-\alpha} * L(\alpha), x > 0$
2. $1 - F(x) \sim C_2 * x^{-\alpha} * L(\alpha), x > 0$

при $x \rightarrow \infty$, где $C_1, C_2 \geq 0, C_1 + C_2 > 0, L(x)$ - медленно меняющаяся функция, т.е. для любого $y > 0$

$$\frac{L(x * y)}{L(x)} \rightarrow 1, x \rightarrow \infty$$

17 Формула для характеристической функции устойчивого распределения

$$\phi(s) = e^{isa + \omega(s, \alpha)}$$
$$\omega(s, \alpha) = \begin{cases} -\sigma^\alpha |s|^\alpha (1 - i\beta \operatorname{sgn}(s) \tan(\frac{\pi\alpha}{2})) & a \neq 1 \\ -\sigma |s| (1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn}(s) \ln|s|) & a = 1 \end{cases}$$

здесь $a \in R^1, \sigma \geq 0, 0 < \alpha \leq 2, -1 \leq b \leq 1$ есть параметры распределения. α - называется параметром устойчивости и отвечает за скорость убывания хвостов.

18 Распределение с тяжелым хвостом

Говорят, что распределение случайной величины X является распределение с тяжелым хвостом, если:

$$E[e^{cX}] = \infty$$

для любого $c > 0$.

19 Распределение с длинным хвостом

Случайная величина X имеет распределение с длинным хвостом, если ее функция распределения $F(x)$ обладает следующим свойством: для любого $y > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P\{X > x + y | X > x\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F^-(x + y)}{F^-(x)} = 1$$

20 Субэкспоненциальное распределение и его основное свойство

Случайная величина X с функцией распределения $F(x)$ является св с субэкспоненциальным распределением, если имеет место следующее свойство: для н.о.р.с.в. $X_1, \dots, X_n$ с функцией распределения $F(x)$

$$\frac{P(X_1 + X_2 + \dots + X_n > x)}{P(X_1 > x)} = \frac{F^{-(*)n}(x)}{F^-(x)} \rightarrow n$$

при $x \rightarrow \infty$, $F^{-(*)n}(x)$ обозначен хвост n -кратной свертки функции F .

21 Распределение с правильно меняющимся хвостом

Говорят, что неотрицательная случайная величина X имеет распределение с правильно меняющимся хвостом, если ее функция распределения F имеет следующее представление:

$$\bar{F}(x) := 1 - F(x) = x^{-\alpha} * L(x), x > 0,$$

где $\alpha > 0$, а $L(x)$ есть медленно меняющаяся функция, т.е.

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{L(xy)}{L(x)} = 1$$

для любого $x > 0$.

22 Соотношение разных классов распределений с тяжелыми хвостами

Классы имеют соотношение

$$R \subset S \subset L \subset H$$

Где R - распределение с правильно меняющимся хвостом S- субэкспоненциальные L - с длинным хвостом H - с тяжелым хвостом

23 Определение случайной замены времени, субординатор

Случайной заменой времени называется случайный процесс $N = (N(t), t \geq 0)$ для которого:

1. $N(0) = 0$ п.н. (не понял зачем здесь п.н.)
2. N имеет неубывающие траектории т.е. $t_1 < t_2$ тогда $N(t_1) \leq N(t_2)$
3. $N(t) \xrightarrow{P} \infty$ при $t \rightarrow \infty$
4. $N(t)$ - непрерывна справа

Если случайная величина является процессом Леви, то она называется субординатором.

Примеры:

1. Детерминированная замена времени, если для любого t с.в. $N(t)$ имеет вырожденное распределение
2. $N = (N(t), t \geq 0)$ - однородный процесс Пуассона с параметром λ
3. Гамма-процесс Леви
4. Случайная величина Z имеющая безгранично делимое распределение и принимающая неотрицательные значения однозначно определяет некоторый субординатор. Один из наиболее известных примеров является α -устойчивый процесс Леви с параметрами $0 < \alpha < 1$ $\beta = 1$

24 Определение подчиненного процесса

Случайный процесс Y является подчиненным процессом $(Y(t), t \geq 0)$, если имеет следующую структуру:

$$Y(t) := X(N(t)).$$

В этом случае процесс X называется управляемым процессом со случайной заменой времени.

25 Определение неоднородного процесса Пуассона

Определим новую функцию:

$$\Lambda(t) := \int_0^t \lambda(s) ds$$

Случайный процесс $N_1(t) = \{N_1(t), t \geq 0\}$ называется неоднородным процессом Пуассона, если

1. $N_1(0) = 0$ п.н.
2. $N_1(t)$ - процесс с независимыми приращениями
3. для всех $t \geq 0, h \geq 0$, случайная величина $N_1(t+h) - N_1(t)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\Lambda(t+h) - \Lambda(t)$

26 Связь однородного и неоднородного процессов Пуассона

Если N_1 есть неоднородный процесс Пуассона с ведущей функцией $\Lambda(t)$, то он имеет следующий вид:

$$N_1(t) = N(\Lambda(t)).$$

где $N = (N(t), t \geq 0)$ есть однородный процесс Пуассона, с параметром $\lambda = 1$.

27 Определения процесса Кокса

Пусть мы имеем последовательность $(X_n, n \geq 1)$ н.о.р.с.в. с функцией распределения $F(x)$. Кроме того, задан однородный процесс Пуассона, $N_\lambda = (N_\lambda(t), t \geq 0)$ с параметром λ . Обозначим $S_0 = 0, S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Сложным процессом Пуассона назовем случайный процесс $N_F(t) := (N_F(t), t \geq 0)$ который определяется по правилу:

$$N_F(t) = \sum_{j=1}^{N_\lambda(t)} X_j$$

Пусть есть сложный процесс Пуассона с функцией распределения слагаемых F и $\lambda = 1$. Кроме того, имеем независимую от $N_F(t)$ случайную замену времени Λ .

Процессом Кокса (дважды стохастическим процессом Пуассона) назовем случайный процесс $N_{F,\Lambda} = (N_F(t), t \geq 0)$, который определяется по правилу:

$$N_F(t) = \sum_{j=1}^{N_\lambda(\Lambda(t))} X_j$$

28 Определение самоподобного процесса

Случайный процесс $Y = (Y(t), t \geq 0)$ называется самоподобным с параметром Херста $H > 0$, если удовлетворяет следующему условию:

$$Y(t) \stackrel{d}{=} c^{-H} Y(ct), \forall t > 0, \forall c > 0,$$

где равенство понимается как равенство конечномерных распределений.

29 Дробное броуновское движение

Дробное броуновское движение $B_H(t)$ с параметром Херста $H > 0$ есть гауссовский процесс $(B_H(t), t \geq 0)$ с нулевым средним и ковариационной функцией

$$C_H(t, s) = \frac{\sigma^2}{2} [|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}]$$

30 Альфа-устойчивое движение Леви

Процесс Леви $(X(t), t \geq 0)$ называется α -устойчивым процессом Леви, если $X(1)$ имеет устойчивое распределение с показателем α .

31 Дробное устойчивое движение

Дробным устойчивым движением Леви с параметром Херста $0 < H < 1$ и параметром $0 < \alpha < 1$ назовем случайный процесс $Y = (Y(t), t \in \mathbb{R}^1)$, который определяется по правилу:

$$Y(t) = \begin{cases} B_H(L_\alpha^{(1)}(t)), & \text{for } t \geq 0 \\ B_H(-L_\alpha^{(2)}(-t)), & \text{for } t < 0 \end{cases}$$

32 Процесс с долговременной зависимостью, пример

$$C(m) = \text{Cov}(X_{n+m}, X_n) = E(X_{n+m} * X_n)$$

Будем говорить, что последовательность с.в. $\{X_n, n = 1, 2, 3, \dots\}$ обладает свойством кратковременной зависимости, если:

$$\sum_{m=0}^{\infty} |C(m)| < \infty$$

В случае расхождения этого ряда, будем говорить что последовательность обладает свойством долговременной зависимости.